מבוא מתמטי לפיזיקה 1 — תרגול 11

מתרגל: אליאור אוריסמן

תוכן העניינים

1 כופלי לגראנג' 2

2 יעקוביאנים 2

2.1 שימוש ביעקוביאנים : מציאת תלות פונקציונלית 3

3 גזירה תחת סימן האינגרל - כלל ליבניץ 4

4 דוגמאות 4

1 כופלי לגראנג'

זוהי שיטה למציאת נקודת קיצון תחת אילוצים. נשאל מהי נקודת קיצון של $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ תחת k אילוצים

$$\begin{cases} \#1 & g_1\left(x_1,...,x_n\right)=0, \\ . & g_2\left(x_1,...,x_n\right)=0, \\ . & . \\ \#k & g_k\left(x_1,...,x_n\right)=0. \end{cases} \tag{1.1}$$

נרכיב את הפונקציה h באופן הבא

$$h\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f-\lambda_1 g_1-...-\lambda_k g_k, \tag{1.2}$$

ועבורה נחקור נקודות קיצון. נחקור נגזרות ראשונות על פי x_i ועל פי λ_k.

2 יעקוביאנים

בפיזיקה מבצעים לא מעט מעברי קואורדינטות, לרוב כדי להביא ביטוי לצורה פשוטה יותר. התהליך הגנרי כרוך בפעולת המעבר

$$\left(x,y\right)\to\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right). \tag{2.1}$$

ניזכר כאשר ביצענו החלפת משתנים באינטגרל עם משתנה אחד, היינו צריכים לבצע שתי פעולות (בנוסף לעדכון האינטגרנד)

- החלפה גורם האינטגרציה $dx\to\frac{dx}{du}du$.
- עדכון גבולות: מx ל- u .

הסיפור עבור אינטגרלים ממימד גבוהה יותר, זהה,.לדוגמה עבור המקרה הדו-מימדי

$$dxdy\to Jdudv \tag{2.2}$$

כאשר J נקרא היעקוביאן המוגדר כדטרמיננטה של הנגזרות הראשונות במעבר הקואורדינטות

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right). \tag{2.3}$$

ועבור אינטגרלים משולשים נצטרך דטרמיננטה 3×3 ונחשב אותה כך-

$$J = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \tag{2.4}$$

כאשר את הכניסות יחליפו הנגזרות.

2.1 שימוש ביעקוביאנים : מציאת תלות פונקציונלית

נניח שיש לנו פונקציות שתלויות אחת בשניה. אפשר לזהות את קיום התלות הזו בהתאפסות של היעקוביאן. נוכיח: ניקח את המקרה הפשוט שיש לנו $f(x,y)$ ו-$g(x,y)$ שקיימת פונקציה $F(f,g)$ כך ש-

$$F(f(x,y), g(x,y)) = 0, \tag{2.5}$$

נניח גם ש -$\frac{\partial F}{\partial f} \neq 0, \frac{\partial F}{\partial g} \neq 0$. נגזור את F ביחס ל x ו-y ונעזר בכלל השרשרת

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

נרשום את שתי המשוואת בצורה מטריצית

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial f} \\ \frac{\partial F}{\partial g} \end{pmatrix}}_{v} = 0 \tag{2.6}$$

קיבלנו $A \cdot v = 0$ עבור $v \neq 0$, ולכן A לא הפיכה (יש משפט לכך). A לא הפיכה משמע $\det A = 0$ (גם לזה יש משפט). קיבלנו אז ש-

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = J\left(\frac{f,g}{x,y}\right) = 0. \tag{2.7}$$

3 גזירה תחת סימן האינגרל - כלל ליבניץ

נניח שיש לנו את האינטגרל הבא

$$\Phi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \tag{3.1}$$

הפונקציה $\Phi(y)$ היא פונקציה של משתנה אחד, y והיא פונקציה של x ו-y. אפשר לשאול מה הנגזרת לפי y. התשובה לכך נתונה על פי כלל ליינביץ

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx + f(b(y),y)\frac{db}{dy} - f(a(y),y)\frac{da}{dy}. \tag{3.2}$$

4 דוגמאות

שאלה 1

חימום : הוכיחו שריבוע הוא המלבן בעל ההיקף המינימלי עבור שטח נתון.

נסמן את אורכי המלבן x ו-y. הפונקציה שאנו רוצים למצוא לה מינימום היא היקף המלבן

$$f(x,y) = 2x + 2y. \tag{4.1}$$

האילוץ הוא השטח (הדגישו בשאלה שזה נתון)

$$xy = S_0. \tag{4.2}$$

נמיר את זה לצורה של אילוץ.

$$g = xy - S_0 = 0. \tag{4.3}$$

סה"כ נקבל

$$h(x,y) = 2x + 2y - \lambda(xy - S_0). \tag{4.4}$$

ועכשיו לפונקציה הזו נחפש נקודת קיצון. נמצא נגזרות ראשונות

$$\begin{aligned} h_x &= 2 - \lambda y, \\ h_y &= 2 - \lambda x. \end{aligned}$$

נשווה ל-0

$$\begin{aligned} h_x = 0 &\Rightarrow \lambda = \frac{2}{y}, \\ h_y = 0 &\Rightarrow \lambda = \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

נחבר ונקבל

$$x = y. \tag{4.5}$$

מסקנה : נקודת הקיצון מתקבלת עבור $x = y$, כלומר כשאורכי המבלן שווים, ואז מדובר בריבוע.

שאלה 2

מצאו את המרחק המינימלי מהראשית לכל הנקודות על החיתוך בין המשטחים

$$\begin{aligned} S_1 &= x - z - 4 = 0 \\ S_2 &= x + y + z - 3 = 0 \end{aligned}$$

אנחנו עובדים בבעיה תלת מימדית במרחב אוקלידי ($\mathbb{R}^3$), לכן המרחק מראשית לנקודה כללית (x,y,z) נתון ע"י

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{4.6}$$

נפתור עבור המרחק הריבועי, ועבור נקודות הקיצון ניקח שורש. נגדיר

$$h = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1 S_1 - \lambda_2 S_2 \tag{4.7}$$

ניקח נגזרות

$$\begin{aligned} h_x &= 2x - \lambda_1 - \lambda_2 \\ h_y &= 2y - \lambda_2 \\ h_z &= 2z + \lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned}$$

נשווה ל-0 וניקח יחד עם האילוצים שלנו כדי לקבל סה"כ 5 משוואות

$$\begin{aligned} 2x - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 2y - \lambda_2 &= 0 \\ 2z + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ x - z - 4 &= 0 \\ x + y + z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

(עם λ_1, λ_2 ממשיים). ניקח קומבינציה לינארית כדי להפתר מλ_i:

$$\begin{aligned} (2x - \lambda_1 - \lambda_2) + (2z + \lambda_1 - \lambda_2) - 2\,(2y - \lambda_2) &= 0 \\ 2x + 2z - 4y &= 0 \\ x + z - 2y &= 0 \end{aligned}$$

נציב $x - z - 4 = 0$ לתוך $x + y + z - 3 = 0$ כדי לקבל

$$\begin{aligned} (z + 4) + y + z - 3 &= 0 \\ 2z + y &= -1 \end{aligned}$$

נציב $x = z + 4$ גם ל $x + z - 2y = 0$ ונקבל

$$\begin{aligned} (z + 4) + z - 2y &= 0 \\ 2z - 2y &= -4 \\ z - y &= -2 \end{aligned}$$

קיבלנו סה"כ

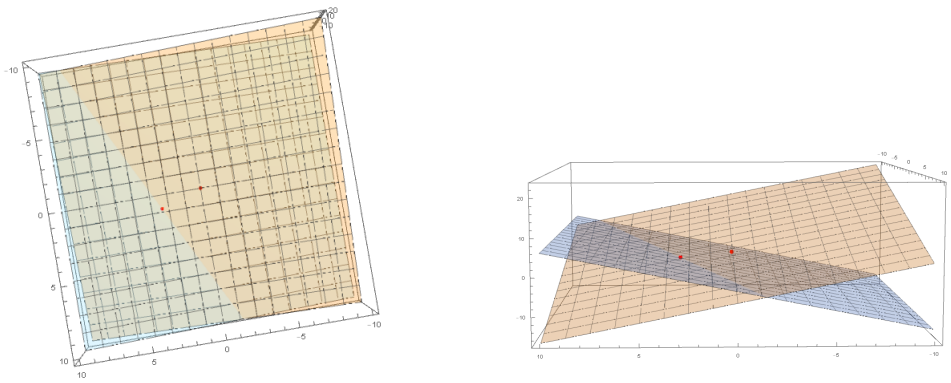
$$\begin{aligned} 2z + y &= -1 \\ z - y &= -2 \end{aligned}$$

נחבר

$$\begin{aligned} 3z &= -3 \\ z &= -1 \\ \Rightarrow y &= 1 \\ \Rightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

לכן

$$L = \sqrt{11}. \tag{4.8}$$



איור 1: חיתוך העקומות עם נקודות אדומות: ראשית ונקודת הפתרון (זו שמקיימת מרחק מינימלי).

שאלה 3

נתונה טרנספורמציה

$$\begin{aligned} u &= \text{arctan}\,(x) + \text{arctan}\,(y)\,, \\ \upsilon &= \frac{x+y}{1-xy}. \end{aligned}$$

האם קיים קשר פונקציונלי בין u ל-υ ? אם כן מצאו אותו.

הדרך שלנו לבדוק קשרים פונקציונליים נעשה דרך היעקוביאן $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$. נחשב נגזרות ראשונות

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{1+x^2}, \\
u_y &= \frac{1}{1+y^2}, \\
\upsilon_x &= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}, \\
\upsilon_y &= \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.
\end{aligned}$$

נשים הכול בדדרמיננטה

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ \upsilon_x & \upsilon_y \end{vmatrix} = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{(1-xy)^2} - \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1+y^2}{(1-xy)^2} = 0.$$

קיבלנו 0, משמע, יש קשר פונקציונלי בין u ל-υ. נרשום

$$\begin{aligned}
u &= \arctan(x) + \arctan(y) \\
&= \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \\
&= \arctan(\upsilon).
\end{aligned}$$

שאלה 4

נתונות הפונקנציות

$$f_1 = \frac{x+y}{z}, \qquad f_2 = \frac{y+z}{x}, \qquad f_3 = \frac{y(x+y+z)}{xz}. \tag{4.9}$$

האם קיימת פונקציה $\Phi(f_1, f_2, f_3) = 0$? אם כן, מצאו אותה.

נעזר ביעקוביאן כדי לבדוק האם יש קשר בין הפונקציות :

$$J\left(\frac{f_1,f_2,f_3}{x,y,z}\right) = \begin{vmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z} \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & -\frac{x+y}{z^2} \\ -\frac{y+z}{x^2} & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{y}{xz} - \frac{y(x+y+z)}{x^2z} & \frac{y}{xz} + \frac{x+y+z}{xz} & \frac{y}{xz} - \frac{y(x+y+z)}{xz^2} \end{pmatrix}\right| = 0. \tag{4.10}$$

וקיבלנו שכן. עכשיו אפשר לנסות למצוא קשר באופן ישיר:

$$f_1 \cdot f_2 = \frac{(x+y)(y+z)}{xz} = \frac{xy+xz+y^2+yz}{xz} = \frac{y(x+y+z)}{xz} + 1,$$
$$f_3 + 1 = \frac{y(x+y+z)}{xz} + 1.$$

אז קיבלנו

$$\Phi(f_1, f_2, f_3) = f_1 f_2 - f_3 - 1 = 0. \tag{4.11}$$

שאלה 5

פתרו את האינטגרל הבא

$$I(x) = \frac{d}{dx}\int_{x^x}^{\sin\left(x^2\right)} \sin(t)\, dt. \tag{4.12}$$

נשתמש בנוסחה לגזירה תחת אינטגרל

$$\frac{d}{dx}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(t)\, dt = g(f_2(x))\frac{df_2(x)}{dx} - g(f_1(x))\frac{df_1}{dx}. \tag{4.13}$$

נזהה $f_2(x) = \sin(x^2)$ ו-$f_1(x) = x^x$ ונחשב

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{d\left(e^{\ln x^x}\right)}{dx} = \frac{d\left(e^{x\ln x}\right)}{dx} = x^x(\ln x + 1),$$
$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{d(\sin(x^2))}{dx} = \cos\left(x^2\right)2x.$$

לכן

$$I(x) = \sin\left(\sin\left(x^2\right)\right)\cos\left(x^2\right)2x - \sin(x^x)\, x^x(\ln x + 1). \tag{4.14}$$

שאלה 6

חשבו את

$$I(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx. \tag{4.15}$$

פשוט מפעילים את כלל לייבניץ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx &= \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\sin(\alpha x)}{x} dx + \frac{\sin(\alpha^3)}{\alpha^2}\frac{\partial(\alpha^2)}{\partial\alpha} - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha} \\
&= \int_{\alpha}^{\alpha^2} \cos(\alpha x)\, dx + \frac{2\sin(\alpha^3)}{\alpha} - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\,|_{\alpha}^{\alpha^2} + \frac{2\sin(\alpha^3)}{\alpha} - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} \\
&= \frac{\sin(\alpha^3) - \sin(\alpha^2)}{\alpha} + \frac{2\sin(\alpha^3)}{\alpha} - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} \\
&= \frac{3\sin(\alpha^3) - 2\sin(\alpha^2)}{\alpha}
\end{aligned}$$

שאלה 7

חשבו את

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \tag{4.16}$$

בעזרת

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{4.17}$$

נגזור את הנתון. אגף שמאל יתן

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-x^2\right) e^{-ax^2} dx,$$

ואגף ימין

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}. \tag{4.18}$$

סה"כ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}. \tag{4.19}$$

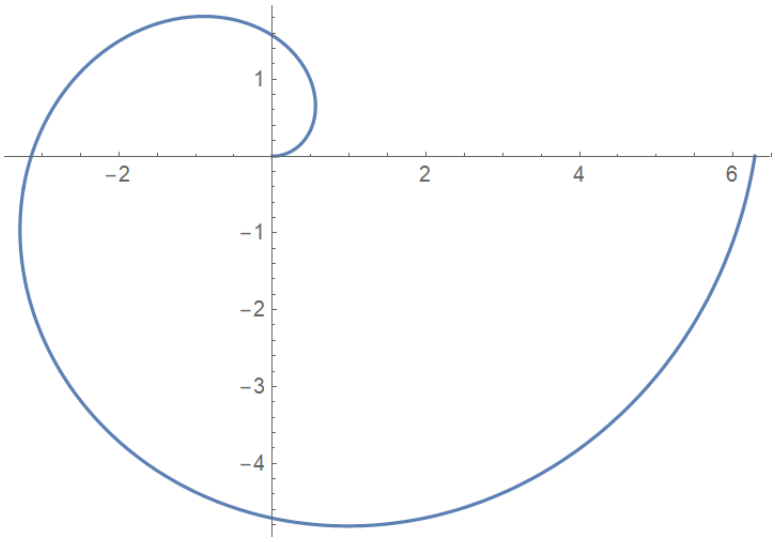
נציב $a = 1$ ונקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.20}$$

שאלה 8

נתונה העקומה $r = \theta$, שרטטו אותה בתחום $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

מסתכלים על נקודות מפתח $\theta = 0, \pi/2, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ ומשלימים את העקומה בין לבין:



איור 2: העקומה $r = \theta$

שאלה 9

נתונה המשוואה הפולרית

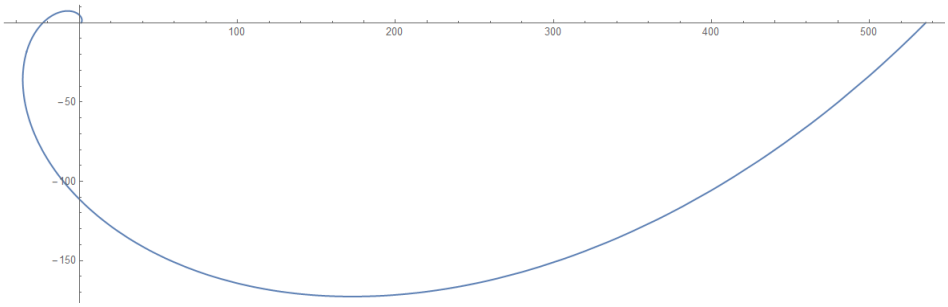
$$r = e^{\theta}, \tag{4.21}$$

שרטטו עבור $a = b = 1$ בתחום $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

נשרטט את העקומה. נבדוק כמה מספרים

$$
\begin{aligned}
r &= e^0 = 1, \\
r &= e^{\pi/2} = 4.81, \\
r &= e^{\pi} = 23.14, \\
r &= e^{\frac{3\pi}{2}} = 111.31, \\
r &= e^{2\pi} = 535.49.
\end{aligned}
$$

ונקבל



איור 3: העקומה $r = e^{\theta}$.

שאלה 10

בחנו את הקשרים הבאים וקבעו מה הם מתארים:

1. קשר לינארי מהצורה $x + y - z = 2$?
2. $\rho = C$ בגליליות?
3. $\phi = C$ בגליליות ?
4. $\rho = z$ בגליליות?
5. $z = C$ בגליליות?
6. $r = C$ בכדוריות?
7. $\theta = C$ בכדוריות ?

C קבוע כלשהו .

1. מדובר במישור. נרשום $z = x + y - 2$. עבור כל בחירה של z מקבלים משוואת ישר. זה פורס משטח אינסופי.
2. $\rho = C$ מתאר בגליליות גליל אינסופי. בעצם מה שיש לנו זה $\sqrt{x^2 + y^2} = C$, שזה $x^2 + y^2 = C^2$. משוואות מעגל עם רדיוס C שנכונה לכל z. ועכשיו רצים על הקואורדינטה $-\infty < z < \infty$.

3. $\phi = C$ בגליליות זה חצי מישור אינסופי. מחזיקים את הזווית של הגליל קבוע ואז רצים על ρ ו-z. זה נותן מישור חצי אינסופי בכיוון של ϕ.

4. $\rho = z$ בגליליות מתאר חרוט אינסופי .נציב ב-ρ ונקבל $\sqrt{x^2+y^2} = z$. אפשר גם לעלות בריבוע ולקבל $\rho^2 = z^2$ ואלו שתי חרוטים.

5. פשוט מגדיר משטח מקביל למישור $x-y$ בערך $z = C$.

6. $r = C$. בוחרים רדיוס ואז רצים על (θ, ϕ). זה בעצם קליפה כדורית ברדיוס C .

7. $\theta = C$ בכדוריות מתאר חרוט אינסופי. מקבעים את θ לערך C ואז רצים על כל הרדיוסים וסורקים $(0, 2\pi)$ עם ϕ .